PART3 関数の連続

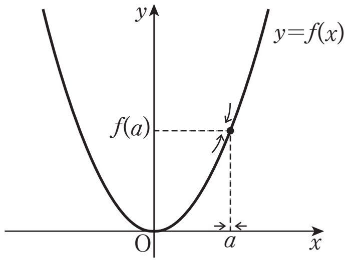
要点整理と公式

要点 ① 関数の連続性

$f(x)=x^2$ などの整式で表される関数は，その定義域内の任意の x の値 a に対して

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

が成り立っている。これにより，$y=f(x)$ のグラフは 1 つのつながった曲線となっている。



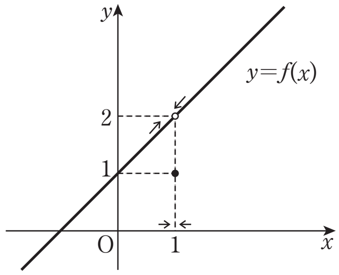
一方で

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\neq 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

について，$y=f(x)$ のグラフは $x=1$ で切れている。この関数 $f(x)$ について

$$\lim_{x\to 1} f(x)= \quad ,\quad f(1)=$$

であり，$\lim_{x\to a} f(x) \qquad f(a)$ である。



一般に，関数 $f(x)$ において，その定義域内の x の値 a に対して，極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し，かつ，$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ が成り立つとき，$f(x)$ は「$x=a$ で　　　」であるという。このとき，$y=f(x)$ のグラフは $x=a$ でつながっている。

$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在しない，または $\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$ のとき，この関数は「$x=a$ で　　　」であるという。このとき，$y=f(x)$ のグラフは $x=a$ で切れている。

関数の極限値の性質より，関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x=a$ で連続ならば，次の関数も $x=a$ で連続である。

$$kf(x)\ (k\text{ は定数}),\ f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\quad (\text{ただし，} g(a)\neq 0)$$

関数 $f(x)$ が定義域のすべての x の値で連続であるとき，$f(x)$ は「　　　」であるという。整式で表される関数や分数関数は連続関数である。また，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数も連続関数である。

連続関数のグラフは，すべての定義域において切れ目なくつながっている。

不連続な関数を考える。

x を超えない最大の整数を　x　と表す。記号　　を「　　　　　　」という。たとえば

$[1.4]=$　，$[-3.1]=$　　，$[7]=$

である。

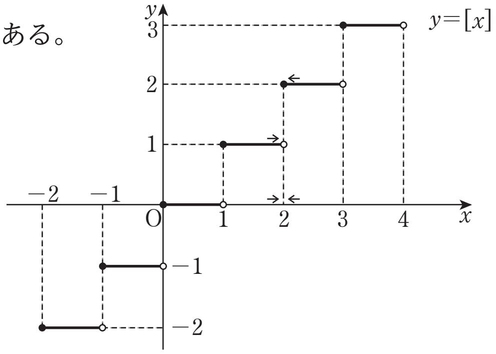
$f(x)=[x]$ とすると，関数 $y=f(x)$ のグラフは右図であり，x が整数値のところで不連続である。

たとえば，$x=2$ においては

$\lim_{x\to 2+0}[x]=$　，　$\lim_{x\to 2-0}[x]=$

であるから，$\lim_{x\to 2}[x]$ は存在せず，

関数 $f(x)=[x]$ は$x=2$ で不連続である。



要点 ② 区間における連続

不等式 $a<x<b$ などを満たす実数 x の値の範囲を「　　　」という。

・区間 $a<x<b$ を「　　　　」といい，　$a,\ b$　と表す。

・区間 $a\leqq x\leqq b$ を「　　　　」といい，　$a,\ b$　と表す。

(ex)　区間 $a\leqq x<b$　…　$a,\ b$　　　　区間 $a<x\leqq b$　…　$a,\ b$

　　　区間 $a\leqq x$　　　…　$a,$　　　　　　区間 $x<b$　　　…　　　$,\ b$

　　　実数全体　　　…

関数 $f(x)$ がある区間 I のすべての x の値で連続であるとき，$f(x)$ は 区間 I で連続関数であるという。このとき $y=f(x)$ のグラフは，区間 I において切れ目なくつながっている。

区間 I が左端を含むとき，$f(x)$ が左端 a において $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ で連続である，という。同様に，区間 I が右端を含むとき，$f(x)$ が右端 b において $\lim_{x\to b} f(x)=f(b)$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=b$ で連続である，という。

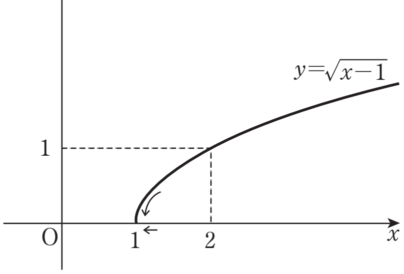
(ex) 無理関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ について

定義域は $x\geqq 1$ であり，定義域の左端 $x=1$ において

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}=0$，$f(1)=0$ より

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

よって，関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ は $x=1$ で連続である。



3 次の関数 $f(x)$ が与えられた x の値で連続であるか不連続であるか調べよ。

(1) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+2}$ ($x=0$)

(2) $f(x)=\sqrt{2-x}$ ($x=2$)

(3) $f(x)=x[x]$ ($x=1$)

Point Pickup

関数の連続性

関数 $f(x)$ において，その定義域内の x の値 a に対して

・極限値 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ が存在　　・$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

がともに満たされているとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

$x=a$ が定義域の

・左端の場合 → $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$　　・右端の場合 → $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=f(a)$

がそれぞれ成り立つとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x=a$ で連続ならば，次の関数も $x=a$ で連続である。

$kf(x)+lg(x)$ (k，l は定数)，　$f(x)g(x)$，　$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a)\neq 0)$

第 6 講　PART3 確認問題

1　次の関数 $f(x)$ が，与えられた x の値で連続であるか不連続であるかを調べよ。

$f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$　　$(x=1)$

[ア]

①　連続である　　　②　不連続である

2　次の関数 $f(x)$ が，与えられた x の値で連続であるか不連続であるかを調べよ。ただし，[オ] は，下の①，②のうちから選べ。

$f(x)=\sqrt{x-3}$　　$(x=3)$

〔解答〕

$$\lim_{x\to 3+0}\sqrt{x-3}=\boxed{イ}$$

また，$f(\boxed{ウ})=\boxed{エ}$

よって，$f(x)$ は $x=3$ で [オ]。

①　連続である　　　②　不連続である

3 次の関数 $f(x)$ が，与えられた x の値で連続であるか不連続であるかを調べよ。ただし，[コ] は，下の①，②のうちから選べ。

$f(x)=x([x]+1) \qquad (x=2)$

※ $[x]$ は，x を超えない最大の整数を表す。

〔解答〕

$1 \leqq x < 2$ のとき，$[x]=$ [カ] であるから，

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \boxed{\text{キ}}$$

$2 \leqq x < 3$ のとき，$[x]=$ [ク] であるから，

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \boxed{\text{ケ}}$$

よって，$f(x)$ は $x=2$ で [コ]。

① 連続である　　② 不連続である

[MEMO]

PART3 関数の連続

3 次の関数 $f(x)$ が与えられた x の値で連続であるか不連続であるか調べよ。

(1) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+2}$ ($x=0$)

(2) $f(x)=\sqrt{2-x}$ ($x=2$)

(3) $f(x)=x[x]$ ($x=1$)

[解答]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2+2}=0$，$f(0)=0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ より，$f(x)$ は $x=0$ で連続である。

(2) $f(x)$ の定義域は $x\leqq 2$

$\displaystyle\lim_{x\to 2-0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}\sqrt{2-x}=0$，$f(2)=0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}f(x)=f(2)$ より，$f(x)$ は $x=2$ で連続である。

(3) $0\leqq x<1$ のとき $[x]=0$，$1\leqq x<2$ のとき $[x]=1$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}x[x]=1\cdot 0=0$，$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}x[x]=1\cdot 1=1$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)$ は存在せず，$f(x)$ は $x=1$ で不連続である。

第 6 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{4x}{x^2+1}=2$$

また，$f(1)=\dfrac{4\cdot1}{1+1}=2$

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$ であるから，

$f(x)$ は $x=1$ で**連続である**。[A]

> [A]　関数の連続性
> 関数 $f(x)$ において，その定義域内の x の値 a に対して，
> ・$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ が存在
> ・$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$
> がともに満たされているとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

2

[正解] イ：0，ウ：3，エ：0，オ：①

[解説]

$f(x)$ の定義域は，$x\geqq3$

$$\lim_{x\to3+0}f(x)=\lim_{x\to3+0}\sqrt{x-3}\quad\text{[B]}$$

$$=\mathbf{0}$$

また，$f(3)=\sqrt{3-3}=\mathbf{0}$

$\displaystyle\lim_{x\to3+0}f(x)=f(3)$ であるから，

$f(x)$ は $x=3$ で**連続である**。

> [B]　定義域が $x\geqq3$ であるから，$x\to3+0$（右側極限）を考える。

3　**[正解]** カ：1，キ：4，ク：2，ケ：6，コ：②

[解説]

$1 \leqq x < 2$ のとき，$[x] = \mathbf{1}$ であるから，[C]

$$f(x) = 2x$$

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} 2x = 4$$

$2 \leqq x < 3$ のとき，$[x] = \mathbf{2}$ であるから，

$$f(x) = 3x$$

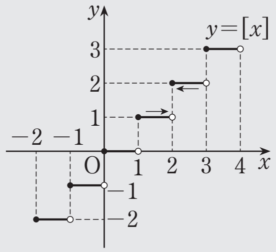
$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} 3x = \mathbf{6}$$

したがって，$\lim_{x \to 2} f(x)$ は存在せず，[D]

$f(x)$ は $x = 2$ で**不連続である**。

[C]　$1 \leqq x < 2,\ 2 \leqq x < 3$ の 2 つの範囲に分けて $f(x)$ を求める。

$y = [x]$ のグラフ



[D]　右極限 $x \to 2+0$ と左極限 $x \to 2-0$ が一致しないので，$\lim_{x \to 2} f(x)$ は存在しない。